3.6 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΩΡΙΑ

$συν(α - β) = συνα\ συνβ + ημα\ ημβ$

$συν(α + β) = συνα\ συνβ - ημα\ ημβ$

$ημ(α + β) = ημα\ συνβ + συνα\ ημβ$

$ημ(α - β) = ημα\ συνβ - συνα\ ημβ$

Παρατηρήστε πως εναλλάσσονται μεταξύ τους αφενός οι τριγωνομετρικοί αριθμοί, αφετέρου τα πρόσημα

$$εφ(α+β) = \frac{εφα + εφβ}{1 - εφαεφβ}$$

$$εφ(α-β) = \frac{εφα - εφβ}{1 + εφαεφβ}$$

$$σφ(α+β) = \frac{σφασφβ - 1}{σφα + σφβ}$$

$$σφ(α-β) = \frac{σφασφβ + 1}{σφβ - σφα}$$

Τους τύπους αυτούς πρέπει να τους ξέρουμε και από το πρώτο μέλος προς το δεύτερο αλλά και από το δεύτερο προς το πρώτο

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να εκφράσετε τις παρακάτω παραστάσεις με ένα τριγωνομετρικό αριθμό ενός τόξου.

i) $ημ14x\ συν5x - συν14x\ ημ5x$

ii) $συν(30^o + x)\ συν(120^o - x) - ημ(30^o + x)\ ημ(120^o - x)$

Λύση

i)

$ημ14x\ συν5x - συν14x\ ημ5x = ημ(14x - 5x) = ημ9x$

ii)

$$\begin{aligned} συν(30^o + x)\ συν(120^o - x) - ημ(30^o + x)\ ημ(120^o - x) &= συν[(30^o + x) + (120^o - x)] \\ &= συν(30^o + x + 120^o - x) \\ &= συν150^o \\ &= συν(180^o - 30^o) \\ &= -συν30^o = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

2.
Να εκφράσετε τις παρακάτω παραστάσεις με ένα τριγωνομετρικό αριθμό ενός τόξου.

i) $\dfrac{εφ\frac{11π}{12}+εφ\frac{π}{12}}{1-εφ\frac{11π}{12}εφ\frac{π}{12}}$ **ii)** $\dfrac{σφ5xσφ2x-1}{σφ5x+σφ2x}$

Λύση

i)
$$\frac{εφ\frac{11π}{12}+εφ\frac{π}{12}}{1-εφ\frac{11π}{12}εφ\frac{π}{12}} = εφ\left(\frac{11π}{12}+\frac{π}{12}\right) = εφπ = 0$$

ii)
$$\frac{σφ5xσφ2x-1}{σφ5x+σφ2x} = σφ(5x+2x) = σφ7x$$

3.
Να βρείτε την τιμή κάθε μιας από τις παρακάτω παραστάσεις

i) $συν850^o\,συν130^o + ημ850^o\,ημ130^o$

ii) $ημ\left(\frac{π}{6}-x\right)συν\left(\frac{π}{3}+x\right) + ημ\left(\frac{π}{3}+x\right)συν\left(\frac{π}{6}-x\right)$

Λύση

i)
$$\begin{aligned} συν850^o\,συν130^o + ημ850^o\,ημ130^o &= συν(850^o-130^o) \\ &= συν720^o \\ &= συν(2\cdot 360^o) = 1 \end{aligned}$$

ii)
$$ημ\left(\frac{π}{6}-x\right)συν\left(\frac{π}{3}+x\right) + ημ\left(\frac{π}{3}+x\right)συν\left(\frac{π}{6}-x\right) = ημ\left(\frac{π}{6}-x+\frac{π}{3}+x\right) = ημ\frac{π}{2} = 1$$

4.

Να αποδειχθεί ότι $συν(α + β)συν(α - β) = συν^2α - ημ^2β = συν^2β - ημ^2α$

Λύση

$$
\begin{aligned}
συν(α + β)συν(α - β) &= (συνασυνβ - ημαημβ)(συνασυνβ + ημαημβ) \\
&= συν^2ασυν^2β - ημ^2αημ^2β \\
&= συν^2α(1 - ημ^2β) - (1- συν^2α)ημ^2β \\
&= συν^2α - συν^2αημ^2β - ημ^2β + συν^2αημ^2β \\
&= συν^2α - ημ^2β \\
\\
&= (1 - ημ^2α) - (1 - συν^2β) \\
&= 1 - ημ^2α - 1 + συν^2β \\
&= συν^2β - ημ^2α
\end{aligned}
$$

5.

Δείξτε ότι

$$\frac{εφ^2 6α - εφ^2 4α}{1 - εφ^2 6αεφ^2 4α} = εφ10α \cdot εφ2α$$

Λύση

$$
\begin{aligned}
\frac{εφ^2 6α - εφ^2 4α}{1 - εφ^2 6αεφ^2 4α} &= \frac{(εφ6α + εφ4α)(εφ6α - εφ4α)}{(1 + εφ6αεφ4α)(1 - εφ6αεφ4α)} \\
&= \frac{εφ6α + εφ4α}{1 - εφ6αεφ4α} \cdot \frac{εφ6α - εφ4α}{1 + εφ6αεφ4α} \\
&= εφ(6α + 4α)εφ(6α - 4α) = εφ10αεφ2α
\end{aligned}
$$

6.

Δείξτε ότι $\dfrac{ημ(β-γ)}{ημβημγ} + \dfrac{ημ(γ-α)}{ημγημα} + \dfrac{ημ(α-β)}{ημαημβ} = 0$

Λύση

$$\frac{ημ(β-γ)}{ημβημγ} = \frac{ημβσυνγ - συνβημγ}{ημβημγ} = \frac{ημβσυνγ}{ημβημγ} - \frac{συνβημγ}{ημβημγ} = σφγ - σφβ$$

και κυκλικά

$$\frac{ημ(γ-α)}{ημγημα} = \text{.......................... ....} = σφα - σφγ$$

$$\frac{ημ(α-β)}{ημαημβ} = \text{..} = σφβ - σφα$$

Προσθέτοντας έχουμε $\dfrac{ημ(β-γ)}{ημβημγ} + \dfrac{ημ(γ-α)}{ημγημα} + \dfrac{ημ(α-β)}{ημαημβ} = 0$

7.

Δείξτε ότι $\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2(120^o + x) + \sigma\upsilon\nu^2(120^o - x) = \frac{3}{2}$

Λύση

$$\begin{aligned}
A &= \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2(120^o + x) + \sigma\upsilon\nu^2(120^o - x)\\
&= \sigma\upsilon\nu^2 x + (\sigma\upsilon\nu 120^o \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu 120^o \eta\mu x)^2 + (\sigma\upsilon\nu 120^o \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu 120^o \eta\mu x)^2\\
&= \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 120^o \sigma\upsilon\nu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu 120^o \sigma\upsilon\nu x\, \eta\mu 120^o\, \eta\mu x + \eta\mu^2 120^o \eta\mu^2 x +\\
&\qquad \sigma\upsilon\nu^2 120^o \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu 120^o \sigma\upsilon\nu x\, \eta\mu 120^o\, \eta\mu x + \eta\mu^2 120^o \eta\mu^2 x\\
&= \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\, \sigma\upsilon\nu^2 120^o \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\, \eta\mu^2 120^o \eta\mu^2 x\\
&= \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \eta\mu^2 x\\
&= \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\cdot\frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu^2 x + 2\cdot\frac{3}{4}\eta\mu^2 x\\
&= \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\cdot\frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu^2 x + 2\cdot\frac{3}{4}\eta\mu^2 x\\
&= \sigma\upsilon\nu^2 x + \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2 x + \frac{3}{2}\eta\mu^2 x\\
&= \frac{3}{2}\sigma\upsilon\nu^2 x + \frac{3}{2}\eta\mu^2 x = \frac{3}{2}(\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x) = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

8.

Αν $\alpha + \beta = 135^o$, δείξτε ότι $(1 + \sigma\varphi\alpha)(1 + \sigma\varphi\beta) = 2$

Λύση

$$\alpha + \beta = 135^o \Rightarrow \sigma\varphi(\alpha + \beta) = \sigma\varphi 135^o$$

$$\frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta} = -\sigma\varphi 45^o$$

$$\frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta} = -1$$

$$\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta - 1 = -\sigma\varphi\alpha - \sigma\varphi\beta$$

$$\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta - 1 = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $(1 + \sigma\varphi\alpha)(1 + \sigma\varphi\beta) = 2$

$1 + \sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta = 2$

$\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta - 1 = 0$ που ισχύει από την (1)

9.

Αν Α, Β, Γ γωνίες τριγώνου, δείξτε ότι $\sigma\varphi A\sigma\varphi B+\sigma\varphi B\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi\Gamma\sigma\varphi A=1$

Λύση

$$A + B + \Gamma = 180^o \quad \Rightarrow \quad A + B = 180^o - \Gamma$$

$$\sigma\varphi(A + B) = \sigma\varphi(180^o - \Gamma)$$

$$\frac{\sigma\varphi A\sigma\varphi B - 1}{\sigma\varphi A + \sigma\varphi B} = -\,\sigma\varphi\Gamma$$

$$\sigma\varphi A\sigma\varphi B - 1 = -\,\sigma\varphi A\sigma\varphi\Gamma - \sigma\varphi B\sigma\varphi\Gamma$$

$$\sigma\varphi A\sigma\varphi B+\sigma\varphi A\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi B\sigma\varphi\Gamma=1$$

10.

Αν Α, Β, Γ γωνίες τριγώνου, δείξτε ότι $\sigma\varphi\frac{A}{2}+\sigma\varphi\frac{B}{2}+\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}=\sigma\varphi\frac{A}{2}\sigma\varphi\frac{B}{2}\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$

Λύση

$$A + B + \Gamma = 180^0 \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=90^0$$

$$\frac{A}{2}+\frac{B}{2} = 90^0 - \frac{\Gamma}{2}$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\sigma\varphi\left(90^0-\frac{\Gamma}{2}\right)$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$$

$$\frac{\sigma\varphi\frac{A}{2}\sigma\varphi\frac{B}{2}-1}{\sigma\varphi\frac{A}{2}+\sigma\varphi\frac{B}{2}}=\frac{1}{\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}}$$

$$\left(\sigma\varphi\frac{A}{2}\sigma\varphi\frac{B}{2}-1\right)\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}=\sigma\varphi\frac{A}{2}+\sigma\varphi\frac{B}{2}$$

$$\sigma\varphi\frac{A}{2}\sigma\varphi\frac{B}{2}\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}-\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}=\sigma\varphi\frac{A}{2}+\sigma\varphi\frac{B}{2}$$

$$\sigma\varphi\frac{A}{2}\sigma\varphi\frac{B}{2}\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}=\sigma\varphi\frac{A}{2}+\sigma\varphi\frac{B}{2}+\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$$

11.

Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

Λύση

$$\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}+\sigma\upsilon\nu x\eta\mu\frac{\pi}{6}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}\eta\mu x+\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x$$

$$\sigma\upsilon\nu x-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}\eta\mu x$$

$$\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}\eta\mu x$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{3}\eta\mu x \quad \textbf{(1)}$$

Αν είναι $\eta\mu x = 0$, η (1) γίνεται $\sigma\upsilon\nu x = 0$.
Επειδή όμως $\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, θα έχουμε $0 + 0 = 1$ που είναι άτοπο.
Άρα $\eta\mu x \neq 0$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sigma\varphi x = \sigma\varphi\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \kappa\pi+\frac{\pi}{6}, \quad \kappa\in Z$$

12.

Αν $\varepsilon\varphi\alpha = 3$, να λύσετε την εξίσωση $\varepsilon\varphi(x+\alpha) = \frac{1}{2}$

Λύση

Με την προϋπόθεση ότι ορίζονται οι $\varepsilon\varphi(x+\alpha)$, $\varepsilon\varphi x$ και $\varepsilon\varphi\alpha$, θα έχουμε

$$\varepsilon\varphi(x+\alpha) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\varepsilon\varphi x+3}{1-3\varepsilon\varphi x} = \frac{1}{2}$$

$$2\varepsilon\varphi x+6 = 1-3\varepsilon\varphi x$$

$$5\varepsilon\varphi x = -5$$

$$\varepsilon\varphi x = -1$$

$$\varepsilon\varphi x = -\,\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4},$$

$$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \kappa\pi-\frac{\pi}{4}, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

13.

Να λύσετε την εξίσωση $εφ\left(\frac{π}{4}+x\right)-εφ\left(\frac{π}{4}-x\right)=2\sqrt{3}$

Λύση

Με την προϋπόθεση ότι ορίζονται οι $εφ\left(\frac{π}{4}+x\right)$, $εφ\left(\frac{π}{4}-x\right)$ και εφx, θα έχουμε

$$εφ\left(\frac{π}{4}+x\right)-εφ\left(\frac{π}{4}-x\right)=2\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{εφ\frac{π}{4}+εφx}{1-εφ\frac{π}{4}εφx}-\frac{εφ\frac{π}{4}-εφx}{1+εφ\frac{π}{4}εφx}=2\sqrt{3}$$

$$\frac{1+εφx}{1-εφx}-\frac{1-εφx}{1+εφx}=2\sqrt{3}$$

Θέτουμε εφx = y οπότε $\frac{1+y}{1-y}-\frac{1-y}{1+y}=2\sqrt{3}$

$$(1+y)^2-(1-y)^2=2\sqrt{3}(1-y)(1+y)$$

$$1+2y+y^2-(1-2y+y^2)=2\sqrt{3}(1-y^2)$$

$$1+2y+y^2-1+2y-y^2=2\sqrt{3}(1-y^2)$$

$$4y=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}y^2$$

$$2\sqrt{3}y^2+4y-2\sqrt{3}=0$$

$$\sqrt{3}y^2+2y-\sqrt{3}=0$$

$Δ = 4 + 4\cdot 3 = 16$, $y=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2\sqrt{3}}=\frac{-2\pm 4}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{2\sqrt{3}}$ ή $\frac{-6}{2\sqrt{3}}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } -\sqrt{3}$$

- $εφx=\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow εφx=εφ\frac{π}{6} \Leftrightarrow x=κπ+\frac{π}{6},\ κ\in\mathbb{Z}$
- $εφx=-\sqrt{3} \Leftrightarrow εφx=-εφ\frac{π}{3}$

  $εφx=εφ\left(-\frac{π}{3}\right) \Leftrightarrow x=λπ-\frac{π}{3},\ λ\in\mathbb{Z}$